

Spis treści

Przedmowa	11
1 Podstawowe pojęcia, oznaczenia	13
1.1 Sumy	13
1.2 Iloczyny	14
1.3 Zbiory	15
1.4 Różnica symetryczna zbiorów	16
1.5 Iloczyn kartezjański	17
1.6 Rodzina zbiorów	18
1.7 Grafy (nieskierowane)	20
1.8 Drzewa	22
1.9 Drzewa ukorzenione	22
1.10 Grafy skierowane	23
1.11 Słowa	24
1.12 Zaokrąglenia	25
1.13 Przedrostki	25
1.14 Notacja asymptotyczna	26
1.15 Wielomiany	29
1.15.1 Dzielenie wielomianów	30
1.15.2 Schemat Horna	32
1.15.3 Pierwiastki wielomianu	33
1.16 Zadania	33
2 Arytmetyka	37
2.1 System dziesiętny	37
2.2 System dwójkowy	38
2.3 Zwiększanie liczby o jeden	39
2.4 Porównywanie liczb	40
2.5 Operacje arytmetyczne w systemie dwójkowym	40
2.6 Zamiana systemu	42
2.7 Długość liczby	44
2.8 Duże liczby	44
2.9 Ułamki	45

2.10	System szesnastkowy	46
2.11	Reprezentacja liczb w komputerze	47
2.11.1	Integer	47
2.11.2	Real	48
2.11.3	Inne typy całkowite	49
2.12	Wyrażenia arytmetyczne w języku Pascal	49
2.13	Poszukiwania binarne (<i>binary search</i>)	50
2.13.1	Poszukiwanie pierwiastka	52
2.14	Zadania	52
2.15	Problemy	53
2.15.1	Uzupełnieniowy zapis liczb ujemnych	53
2.15.2	Liczby w postaci ósemkowej i szesnastkowej w języku C	53
2.15.3	Sumy potęg dwójki	53
2.15.4	Waga	54
3	Kombinatoryka	55
3.1	Zasada podwójnego zliczania	55
3.2	Ciągi	56
3.3	Funkcje	57
3.4	Ciągi bez powtórzeń	57
3.5	Permutacje	58
3.6	Podzbiory	60
3.7	Podzbiory k -elementowe	61
3.8	Dwumian Newtona	63
3.9	Zasada szufladkowa Dirichleta	65
3.10	Zasada sumy	65
3.11	Zasada włączania i wyłączania	66
3.12	Przestawienia	69
3.13	Generowanie obiektów kombinatorycznych	70
3.13.1	Generowanie podzbiorów	70
3.13.2	Generowanie k -elementowych podzbiorów	70
3.13.3	Generowanie permutacji	72
3.14	Zadania	72
3.15	Problemy	75
3.15.1	Najkrótsze drogi	75
3.15.2	Rozmieszczanie przedmiotów w pudełkach.	76
3.15.3	Wybór n przedmiotów k rozróżnialnych typów	77
3.15.4	Kombinacje z powtórzeniami	77
3.15.5	Permutacje z powtórzeniami	77
3.15.6	Podziały uporządkowane	78
3.15.7	Permutacje bez punktów stałych	78
3.15.8	Liczba surjekcji	78
3.15.9	Twierdzenie Ramseya	78
3.15.10	Twierdzenie Halla o różnych reprezentantach	80

4	Rachunek prawdopodobieństwa	81
4.1	Przestrzeń zdarzeń elementarnych	81
4.1.1	Zdarzenia	81
4.1.2	Dalsze przykłady przestrzeni zdarzeń elementarnych	82
4.2	Prawdopodobieństwo	83
4.2.1	Klasyczna definicja prawdopodobieństwa, rozkład jednostajny	84
4.2.2	Własności prawdopodobieństwa	84
4.3	Prawdopodobieństwo warunkowe	85
4.4	Zdarzenia niezależne	86
4.5	Prawdopodobieństwo całkowite	87
4.6	Schemat dwumianowy (Bernoulliego)	90
4.6.1	Rzut symetryczną monetą	90
4.6.2	Kolorowanie wierzchołków grafu	91
4.6.3	Trzykrotny rzut niesymetryczną monetą	92
4.6.4	Ogólny schemat – n -krotny rzut niesymetryczną monetą	93
4.7	Zmienna losowa	94
4.7.1	Gęstość rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej	94
4.7.2	Dalsze przykłady zmiennych losowych	95
4.7.3	Rozkład jednopunktowy	96
4.7.4	Rozkład zero-jedynkowy	96
4.8	Łączny rozkład prawdopodobieństwa	97
4.8.1	Gęstość łącznego rozkładu	97
4.9	Niezależność zmiennych losowych	98
4.9.1	Własność niezależnych zmiennych losowych	100
4.10	Rozkład dwumianowy (Bernoulliego)	100
4.11	Wartość oczekiwana, średnia	101
4.11.1	Własności wartości oczekiwanej	102
4.11.2	Wartość oczekiwana rozkładu jednopunktowego	103
4.11.3	Wartość oczekiwana rozkładu zero-jedynkowego	103
4.11.4	Wartość oczekiwana rozkładu dwumianowego	103
4.11.5	Wartość oczekiwana liczby różnokolorowych krawędzi	103
4.11.6	Własności wartości oczekiwanej cd.	104
4.12	Nierówność Markowa	105
4.13	Wariancja	105
4.13.1	Wariancja rozkładu jednopunktowego	106
4.13.2	Wariancja rozkładu zero-jedynkowego	107
4.13.3	Wariancja rozkładu dwumianowego	107
4.13.4	Wariancja liczby różnokolorowych krawędzi	107
4.14	Nierówność Czebyszewa	108
4.15	Krańce rozkładu dwumianowego	108
4.16	Problem dnia urodzin	109
4.17	Algorytmy probabilistyczne	109
4.17.1	Algorytm z jednostronnym błędem	110
4.17.2	Algorytm sprawdzający mnożenie wielomianów	110
4.17.3	Algorytmy z błędem obustronnym	111

4.17.4	Algorytm kolorowania wierzchołków grafu	111
4.18	Zadania	112
4.19	Problemy	116
4.19.1	Niezależność zmiennych losowych	116
4.19.2	Suma kwadratów	116
5	Funkcje boolowskie	117
5.1	Algebra Boole'a	117
5.1.1	Algebra podzbiorów	119
5.1.2	Alternatywa wykluczająca, xor	119
5.2	Wyrażenia boolowskie	120
5.2.1	Wyrażenia boolowskie w języku Pascal	121
5.3	Funkcje boolowskie	122
5.3.1	Funkcje boolowskie jednej zmiennej	123
5.3.2	Funkcje boolowskie dwóch zmiennych	123
5.3.3	Alternatywa i koniunkcja n zmiennych	124
5.3.4	Funkcja progowa	124
5.3.5	Postacie normalne funkcji boolowskich	125
5.4	Wielowartościowe funkcje boolowskie	127
5.5	Sieci boolowskie	127
5.5.1	Sieć dla alternatywy kilku zmiennych	129
5.5.2	Sumator	129
5.6	Operacje boolowskie na wektorach	132
5.6.1	Reprezentacja zbioru	132
5.6.2	Operacje na wektorach w języku Pascal	133
5.6.3	Operacje na wektorach w języku C	134
5.6.4	Flagi	134
5.6.5	Reprezentacja ustawienia bierok w grze w szachy	134
5.6.6	Szyfrowanie w systemie one-pad	135
5.7	Funkcja parzystości (<i>parity</i>)	136
5.8	Odciski, zabezpieczanie danych	137
5.9	Zadania	139
5.10	Problemy	140
5.10.1	Gra w kamienie	140
5.10.2	Tożsamości w algebrze podzbiorów	141
5.10.3	Sieci funkcji progowych i sortujących	141
5.10.4	Wspólne losowanie bitów	142
6	Teoria liczb	143
6.1	Dzielenie całkowitoliczbowe	143
6.2	Podzielność liczb	144
6.3	Relacja kongruencji	145
6.4	Klasy abstrakcji	146
6.5	Pierścień $\mathbb{Z}_m$	147
6.5.1	Pierścień $\mathbb{Z}_5$	149

6.5.2	Pierścień $\mathbb{Z}_4$	149
6.6	Największy wspólny dzielnik	150
6.7	Algorytm Euklidesa	150
6.7.1	Rozszerzony algorytm Euklidesa	152
6.8	Liczby pierwsze i względnie pierwsze	153
6.9	Rozkład liczb na czynniki pierwsze	154
6.10	Elementy odwracalne	155
6.11	Funkcja liniowa	157
6.12	Szyfry liniowe	159
6.13	Chińskie twierdzenie o resztach	161
6.14	Obliczenia na dużych liczbach	165
6.15	Algorytm rosyjskich chłopów mnożenia liczb	166
6.16	Szybkie potęgowanie	167
6.17	Pierwiastki kwadratowe	169
6.18	Funkcja Eulera	170
6.19	Małe twierdzenie Fermata	171
6.20	Szyfry RSA	172
6.21	Testy pierwszości	173
6.21.1	Test naiwny	173
6.21.2	Test Fermata	173
6.21.3	Test Millera-Rabina	174
6.21.4	Losowanie liczb pierwszych	176
6.22	Zadania	176
6.23	Problemy	178
6.23.1	Największy wspólny dzielnik	178
6.23.2	Najmniejsza wspólna wielokrotność	178
6.23.3	Liczby względnie pierwsze	178
6.23.4	Liczby pierwsze	179
6.23.5	Chińskie twierdzenie o resztach	179
6.23.6	System szyfrowania one-pad	179
6.23.7	Przestrzeń liniowa	179
6.23.8	Uogólnienie małego twierdzenia Fermata	179
6.23.9	Algorytm Euklidesa dla wielomianów	180
6.23.10	Wspólne losowanie liczby, gra w marynarza	180
7	Stosy, kolejki i drzewa	181
7.1	Listy	181
7.2	Stosy i kolejki	181
7.3	Implementacja stosu	183
7.4	Implementacja kolejki	183
7.5	Drzewa ukorzenione	184
7.6	Drzewa binarne	184
7.7	Drzewa wyrażeń arytmetycznych	186
7.8	Przeszukiwanie drzew binarnych	188
7.8.1	Przeszukiwanie drzewa w głąb	188

7.8.2	Przeszukiwanie drzewa wszerek	189
7.9	Drzewa decyzyjne	190
7.10	Drzewo gry	192
7.10.1	Algorytm waluacji drzewa gry	193
7.11	Zadania	196
7.12	Problemy	196
7.12.1	Szukanie fałszywej monety	196
8	Rekurencja	197
8.1	Wieża Hanoi	197
8.2	Drzewo rekursji	198
8.3	Algorytm Euklidesa, wersja rekurencyjna	199
8.3.1	Rekurencyjne algorytmy przeszukiwania drzew	200
8.4	Drzewa poszukiwań binarnych	201
8.5	Funkcje rekurencyjne	203
8.6	Funkcja (ciąg) Fibonacciego	203
8.7	Algorytm sortowania przez scalanie	204
8.8	Rozwiązywanie równań i nierówności rekurencyjnych	206
8.9	Metoda podstawiania	206
8.10	Metoda iteracyjna	207
8.11	Metoda rekurencji uniwersalnej	209
8.12	Funkcje tworzące	210
8.13	Zadania	211
8.14	Problemy	214
8.14.1	Funkcja Ackermanna	214
8.14.2	Wieża Hanoi	214
9	Grafy (nieskierowane)	215
9.1	Izomorfizm grafów	216
9.2	Drogi i cykle	218
9.3	Drzewa	219
9.4	Przeszukiwanie grafów w głąb	221
9.5	Algorytm przeszukiwania grafu wszerek	222
9.6	Liczenie składowych spójności	223
9.7	Drzewa spinające	223
9.8	Fundamentalny zbiór cykli	224
9.9	Minimalne drzewo spinające	226
9.10	Cykle i drogi Eulera	228
9.11	Drogi i cykle Hamiltona	231
9.12	Kolorowanie grafów	232
9.12.1	Kolorowanie z nawrotami	232
9.12.2	Kolorowanie grafu dwoma kolorami	234
9.12.3	Heurystyki kolorowania grafów	235
9.13	Hiperkostka	236
9.13.1	Rozgłaszanie wiadomości	237

9.13.2	Zbieranie informacji	238
9.13.3	Plotkowanie	238
9.14	Zadania	239
9.15	Problemy	241
9.15.1	Drzewa spinające	241
9.15.2	Skojarzenia	241
9.15.3	Minimalne drzewo spinające	241
9.15.4	Cykle Eulera	242
9.15.5	Grafy dwuspójne	242
10	Grafy skierowane	243
10.1	Podstawowe definicje	243
10.2	Najkrótsze drogi w grafie	244
10.3	II etap	245
10.4	Algorytm Forda-Bellmana	245
10.5	Dodatkowe długości, algorytm Dijkstry	247
10.6	Najkrótsza droga w grafach acyklicznych	249
10.7	Zadania	251
10.8	Problemy	252
10.8.1	Spójność	252
10.8.2	Cykl Eulera w grafie skierowanym	252
10.8.3	Ciąg de Bruijna	252
	Bibliografia	253
	Skorowidz	254