

Spis treści

Spis treści:

1. Pojęcie funkcji, jej zastosowanie i rodzaje.....	11
1.1 Definicja funkcji i jej interpretacja.....	11
1.2 Dziedzina i przeciwdziedzina funkcji oraz funkcje odwrotne.....	11
1.3 Monotoniczność.....	12
1.4 Parzystość i nieparzystość funkcji.....	12
1.5 Granica funkcji w punkcie.....	13
2. Przykłady funkcji.....	14
2.1. Ciąg nieskończony.....	14
2.2. Funkcje $y = e^x$ i $y = \ln x$	15
2.3. Funkcje hiperboliczne.....	16
2.4. Funkcje cyklometryczne.....	18
3. Pochodna funkcji i jej zastosowania.....	22
3.1. Iloraz różnicowy i pochodna.....	22
3.1.1. Pojęcie ilorazu różnicowego oraz jego interpretacja geometryczna.....	22
3.1.2. Definicja pochodnej i jej interpretacja.....	22
3.1.3. Interpretacja geometryczna pochodnej funkcji w punkcie.....	23
3.2. Pochodne funkcji.....	24
3.2.1. Tablica pochodnych.....	24
3.2.2. Podstawowe wzory.....	25
3.2.3. Obliczanie pochodnych funkcji wykładniczo potęgowych.....	27
3.3. Wyrażenia nieoznaczone. Reguła de L'Hospitala.....	29
3.4. Pochodne wyższych rzędów.....	31
3.5. Przebieg zmienności funkcji.....	32
3.5.1. Dziedzina.....	32
3.5.2. Granice na krańcach dziedziny i asymptoty.....	32
3.5.3. Własności szczególne funkcji.....	34
3.5.4. Monotoniczność i ekstrema.....	35
3.5.5. Tabela i wykres.....	36
4. Metody przedstawiania krzywych na płaszczyźnie.....	40
4.1. Układ kartezjański.....	40
4.1.1. Krzywa jest opisana funkcją $y = f(x)$, $x \in (a, b)$	40
4.1.2. Krzywa jest opisana funkcją $x = g(y)$, $y \in (c, d)$	40
4.1.3. Krzywa jest opisana równaniem uwikłanym w postaci $F(x, y) = 0$	41
4.1.4. Wykres opisany jest równaniami parametrycznymi.....	45
4.2. Układ biegunowy (φ, ρ)	47
5. Rachunek całkowy funkcji jednej zmiennej.....	50
5.1. Całki nieoznaczone.....	50
5.1.1. Definicja całki nieoznaczonej.....	50
5.1.2. Tablica całek nieoznaczonych.....	50
5.1.3. Własności całek.....	52
5.1.4. Podstawowe całki wynikające z definicji.....	52

Spis treści

5.1.5. Metoda całkowania przez podstawianie i wzory wynikające z tej metody	52
5.1.6. Metoda całkowania przez części ("per partes")	53
5.1.7. Całkowanie funkcji wymiernych	55
5.1.8. Całkowanie funkcji trygonometrycznych	58
5.1.9. Wzory rekurencyjne	59
5.1.10. Przykładowe dowody wzorów rekurencyjnych.....	59
5.1.11. Przykładowe dowody innych wzorów	60
5.1.12. Całkowanie funkcji niewymiernych.....	61
5.2. Całki nieoznaczone – obliczanie	67
5.3. Całki oznaczone (całki Riemanna).....	81
5.3.1. Pojęcie całki oznaczonej	81
5.3.2. Własności całek oznaczonych.....	81
5.4. Całki niewłaściwe	84
5.4.1. Całka niewłaściwa pierwszego rodzaju.....	84
5.4.2. Całka niewłaściwa drugiego rodzaju.....	85
5.5. Zastosowanie geometryczne całek	88
5.5.1. Obliczanie pól	88
5.5.2. Obliczanie długości łuków	89
5.5.3. Obliczanie objętości i pola powierzchni brył obrotowych.....	90
5.6. Zastosowanie rachunku całkowego.....	91
6. Liczby zespolone.....	102
6.1. Wstęp	102
6.2. Wprowadzenie liczb zespolonych.....	103
6.3. Liczby sprzężone.....	104
6.4. Postać trygonometryczna i wykładnicza oraz działania na nich.....	106
7. Wyznaczniki	113
7.1. Definicja wyznaczników	113
7.1.1. Wyznaczniki I – go stopnia.....	113
7.1.2. Wyznaczniki II – go stopnia	113
7.1.3. Wyznaczniki III – go stopnia	114
7.1.4. Wyznaczniki n – tego stopnia	115
7.1.5. Przykłady z wnioskami i twierdzeniami oraz przypadek szczególny	115
7.2. Własności wyznaczników	117
8. Macierze.....	119
8.1. Definicja macierzy	119
8.2. Działania na macierzach liczbowych.....	119
8.2.1. Równość macierzy	119
8.2.2. Dodawanie i odejmowanie macierzy	119
8.2.3. Mnożenie macierzy przez liczbę	119
8.2.4. Mnożenie macierzy	119
8.3. Rodzaje macierzy.....	120
8.4. Macierze kwadratowe	121
8.5. Rząd macierzy.....	122

Spis treści

8.6. Metoda przekształceń elementarnych macierzy i macierze równoważne	123
8.7. Macierz odwrotna	124
9. Układy równań liniowych.....	127
9.1. Układy n równań o n niewiadomych.....	127
9.2. Układ m równań liniowych o „ n ” niewiadomych	133
10. Teoria wektorów	135
10.1. Wektory na osi	135
10.2. Wektory na płaszczyźnie.....	136
10.3. Wektory w przestrzeni	137
10.4. Podstawowe działania na wektorach.....	138
10.5. Iloczyn skalarny wektorów (liczba)	138
10.6. Iloczyn wektorowy.....	140
10.7. Iloczyn mieszany.....	144
11. Proste i płaszczyzny w przestrzeni.....	148
11.1. Płaszczyzna w przestrzeni.....	148
11.2. Prosta w przestrzeni	149
11.3. Prosta i płaszczyzna	154
11.3.1. Prosta jest równoległa do płaszczyzny.....	154
11.3.2. Prosta jest prostopadła do płaszczyzny	154
11.3.3. Miara kąta pomiędzy prostą, płaszczyzną.....	155
11.4. Dwie płaszczyzny	155
11.4.1. Równoległość.....	156
11.4.2. Prostopadłość	156
11.4.3. Miara kąta pomiędzy płaszczyznami	157
11.5. Dwie proste	157
11.5.1. Warunek równoległości	158
11.5.2. Warunek prostopadłości.....	158
11.5.3. Miara kąta pomiędzy prostymi.....	158
12. Powierzchnie stopnia drugiego	166
12.1. Powierzchnie obrotowe.....	166
12.1.1. Powierzchnia kulista (sfera)	166
12.1.2. Elipsoida	167
12.1.3. Hiperboloida jednowłokowa.....	168
12.1.4. Hiperboloida dwuwłokowa.....	168
12.1.5. Stożek.....	169
12.1.6. Paraboloida eliptyczna	169
12.1.7. Paraboloida hiperboliczna.....	170
12.2. Powierzchnie walcowe.....	170
12.2.1. Walec eliptyczny.....	170
12.2.2. Walec paraboliczny.....	171
12.2.3. Walec hiperboliczny.....	171
13. Funkcje wielu zmiennych i ich rachunek różniczkowy	172
13.1. Funkcje dwóch zmiennych.....	172

Spis treści

13.2. Granica i ciągłość funkcji dwóch zmiennych.....	174
13.3. Pochodne cząstkowe	176
13.4. Różniczka zupełna	177
13.5. Pochodne cząstkowe wyższego rzędu.....	179
13.5.1. Twierdzenie Schwarz'a	179
13.5.2. Pochodne cząstkowe funkcji złożonych.....	181
13.6. Ekstrema funkcji dwóch zmiennych $z = f(x,y)$	183
13.6.1. Warunek konieczny.....	183
13.6.2. Warunek dostateczny	184
13.7. Powierzchnia w postaci uwikłanej.....	185
13.8. Pochodna kierunkowa	189
14. Rachunek całkowy funkcji wielu zmiennych.....	191
14.1. Całki podwójne	191
15. Całki krzywoliniowe.....	203
15.1. Całka krzywoliniowa niekierowana.....	203
15.2. Całka krzywoliniowa skierowana	206
15.3. Twierdzenie Greena	207
16. Szeregi liczbowe	209
16.1. Definicja szeregu i jego zbieżności.....	209
16.2. Własności szeregu liczbowego.....	209
16.2.1. Warunek konieczny zbieżności:.....	209
16.2.2. Reszta szeregu.....	210
16.2.3. Szeregi o wyrazach nieujemnych.....	210
16.2.4. Szereg naprzemienny	214
17. Szeregi funkcyjne.....	216
17.1. Ciągi funkcyjne.....	216
17.2. Podstawowe własności szeregów funkcyjnych.....	217
17.3. Szeregi potęgowe	218
17.4. Kryterium Abela	224
17.5. Szeregi Fouriera	225
17.6. Twierdzenie Dirichleta	227
18. Równania różniczkowe	232
18.1. Równania różniczkowe rzędu I.....	232
18.1.1. Wiadomości ogólne.....	232
18.1.2. Równania różniczkowe o zmiennych rozdzielonych	233
18.1.3. Równania różniczkowe jednorodnej postaci $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$	234
18.1.4. Równania liniowe	235
18.1.5. Równanie Bernoulliego.....	237
18.2. Równania różniczkowe rzędu II.....	238
18.2.1. Wiadomości ogólne.....	238
18.2.2. Równania różniczkowe rzędu II-go sprowadzalne do równań rzędu I-go	239
18.2.3. Równania liniowe rzędu II-go.....	244
Literatura.....	251