

Spis treści

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |              |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------|
| <b>Przedmowa do pierwszego wydania</b>                                                                                                                                                                                                                                                                    | <b>xviii</b> |
| <b>Przedmowa do drugiego wydania</b>                                                                                                                                                                                                                                                                      | <b>xix</b>   |
| <b>Przedmowa do trzeciego wydania</b>                                                                                                                                                                                                                                                                     | <b>xx</b>    |
| <b>Przedmowa do czwartego wydania</b>                                                                                                                                                                                                                                                                     | <b>xxi</b>   |
| <b>Przedmowa do siódmego wydania</b>                                                                                                                                                                                                                                                                      | <b>xxii</b>  |
| <b>Od wydawcy polskiej edycji</b>                                                                                                                                                                                                                                                                         | <b>xxiii</b> |
| <b>Jak korzystać z tej książki</b>                                                                                                                                                                                                                                                                        | <b>xxiv</b>  |
| <b>Przydatne informacje</b>                                                                                                                                                                                                                                                                               | <b>xxvi</b>  |
| <b>Część I Tematy podstawowe</b>                                                                                                                                                                                                                                                                          | <b>1</b>     |
| <b>Program F.1 Arytmetyka</b>                                                                                                                                                                                                                                                                             | <b>3</b>     |
| <i>Czego się nauczę z tego programu?</i>                                                                                                                                                                                                                                                                  | 3            |
| Quiz F.1                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 4            |
| Typy liczb                                                                                                                                                                                                                                                                                                | 6            |
| Liczby naturalne - Cyfry i pozycyjność - Punkty na osi i porządek<br>- Liczby całkowite - Nawiasy - Dodawanie i odejmowanie - Mnożenie<br>i dzielenie - Nawiasy i kolejność wykonywania działań - Podstawowe<br>prawa arytmetyki - Szacowanie - Zaokrąglanie - Podsumowanie -<br>Ćwiczenia na powtórzenie |              |
| Czynniki i liczby pierwsze                                                                                                                                                                                                                                                                                | 15           |
| Czynniki - Liczby pierwsze - Rozkład na czynniki pierwsze - Podstawowe<br>twierdzenie arytmetyki - Największy wspólny dzielnik (NWD)<br>- Najmniejsza wspólna wielokrotność (NWW) - Podsumowanie -<br>Ćwiczenia na powtórzenie Ułamki, stosunki i procenty                                                | 18           |
| Dzielenie liczb całkowitych - Mnożenie ułamków - Z - Równość ułamków<br>- Dzielenie ułamków - Dodawanie i odejmowanie ułamków - Ułamki na<br>kalkulatorze - Stosunki - Procenty - Podsumowanie - Ćwiczenia<br>na powtórzenie                                                                              |              |
| Ułamki dziesiętne                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 27           |
| Dzielenie liczb całkowitych - Zaokrąglanie - Cyfry znaczące -<br>Miejsca po przecinku - Zera końcowe - Ułamki zwykłe w postaci<br>dziesiętnej - Ułamki w postaci dziesiętnej jako ułamki zwykłe                                                                                                           |              |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                        |           |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| - Ułamki dziesiętne nieskończone - Liczby wymierne, niewymierne i rzeczywiste - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie                                                                                                                                                                | 33        |
| Potęgi                                                                                                                                                                                                                                                                                 |           |
| Podnoszenie liczby do potęgi - Prawa potęgowania - Potęgowanie na kalkulatorze - Potęgi ułamkowe i pierwiastki - Liczby niewymierne                                                                                                                                                    |           |
| - Mnożenie i dzielenie liczb całkowitych przez potęgi 10 - Kolejność wykonywania działań - Postać standardowa - Wyprowadzanie postaci standardowej - Użycie kalkulatora - Preferowana postać standardowa - Sprawdzanie obliczeń - Dokładność - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie | 44        |
| Systemy liczbowe                                                                                                                                                                                                                                                                       |           |
| System dziesiętny - System binarny (dwójkowy) - System ósemkowy - System dwunastkowy - System szesnastkowy - Metoda alternatywna - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie                                                                                                             | 52        |
| Zmiana podstawy z dziesiętnej na inną podstawę                                                                                                                                                                                                                                         |           |
| Postać dwójkowa - Postać ósemkowa - Postać dwunastkowa - Zmiana ułamka w systemie dziesiętnym na postać ósemkową - Użycie liczb w systemie ósemkowym jako etapu pośredniego                                                                                                            | 56        |
| Metoda odwrotna                                                                                                                                                                                                                                                                        |           |
| Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie                                                                                                                                                                                                                                                | 58        |
| <i>Czy potrafisz? Lista kontrolna F.1</i>                                                                                                                                                                                                                                              | 59        |
| <i>Zadania sprawdzające F.1</i>                                                                                                                                                                                                                                                        | 60        |
| <i>Dalsze wyzwania F.1</i>                                                                                                                                                                                                                                                             |           |
| <b>Program F.2 Wprowadzenie do algebry</b>                                                                                                                                                                                                                                             | <b>63</b> |
| <i>Czego się nauczę z tego programu?</i>                                                                                                                                                                                                                                               | 63        |
| <i>Quiz F.2</i>                                                                                                                                                                                                                                                                        | 64        |
| Wyrażenia algebraiczne                                                                                                                                                                                                                                                                 | 65        |
| Symbole inne niż cyfry - Stałe - Zmienne - Reguły algebry - Kolejność wykonywania działań - Wyrazy i współczynniki - Zbieranie wyrazów podobnych - Wyrazy analogiczne - Rozszerzanie nawiasów - Zagnieżdżone nawiasy - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie                         | 72        |
| Potęgi i logarytmy                                                                                                                                                                                                                                                                     |           |
| Potęgi - Reguły dotyczące wykładników - Logarytmy - Reguły dotyczące logarytmów - Podstawa 10 i podstawa e - Zmiana podstawy - Równania logarytmiczne - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie                                                                                        | 81        |
| Mnożenie i dzielenie algebraiczne                                                                                                                                                                                                                                                      |           |
| Mnożenie - Dzielenie - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie                                                                                                                                                                                                                         | 85        |
| Ułamki algebraiczne                                                                                                                                                                                                                                                                    |           |
| Dodawanie i odejmowanie - Mnożenie i dzielenie - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie                                                                                                                                                                                               | 88        |
| Rozkład wyrażen algebraicznych na czynniki                                                                                                                                                                                                                                             |           |
| Wspólne czynniki - Wspólne czynniki uzyskane przez grupowanie - Wzory skróconego mnożenia - Wyrażenia kwadratowe będące iloczynem prostych czynników - Rozkład na czynniki wyrażen kwadratowych - Test dla prostych czynników - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie                | 98        |
| <i>Czy potrafisz? Lista kontrolna F.2</i>                                                                                                                                                                                                                                              |           |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |            |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <i>Zadania sprawdzające F.2</i>                                                                                                                                                                                                                                                                         | 98         |
| <i>Dalsze wyzwania F.2</i>                                                                                                                                                                                                                                                                              | 99         |
| <b>Program F.3 Wyrażenia i równania</b>                                                                                                                                                                                                                                                                 | <b>101</b> |
| <i>Czego się nauczę z tego programu?</i>                                                                                                                                                                                                                                                                | 101        |
| <i>Quiz F.3</i>                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 102        |
| Wyrażenia i równania                                                                                                                                                                                                                                                                                    | 103        |
| Obliczanie wartości wyrażeń - Równania - Obliczanie wartości zmiennych niezależnych - Transpozycja wzorów - Proces obliczania wartości - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie                                                                                                                        |            |
| Równania wielomianowe                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 113        |
| Wyrażenia wielomianowe - Obliczanie wartości wielomianów - Obliczanie wartości wielomianów metodą Homera - Twierdzenie o resztach (twierdzenie Bezouta) - Twierdzenie o rozkładzie wielomianu na czynniki - Rozkład na czynniki wielomianów stopnia czwartego - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie |            |
| <i>Czy potrafisz? Lista kontrolna F.3</i>                                                                                                                                                                                                                                                               | 124        |
| <i>Zadania sprawdzające F.3</i>                                                                                                                                                                                                                                                                         | 124        |
| <i>Dalsze wyzwania F.3</i>                                                                                                                                                                                                                                                                              | 125        |
| <b>Program F.4 Wykresy</b>                                                                                                                                                                                                                                                                              | <b>127</b> |
| <i>Czego się nauczę z tego programu?</i>                                                                                                                                                                                                                                                                | 127        |
| <i>Quiz F.4</i>                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 128        |
| Wykresy równań                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 129        |
| Równania - Uporządkowane pary liczb - Kartezjański układ współrzędnych - Rysowanie wykresów - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie                                                                                                                                                                   |            |
| Stosowanie arkuszy kalkulacyjnych                                                                                                                                                                                                                                                                       | 137        |
| Arkusze kalkulacyjne - Wiersze i kolumny - Wpisywanie tekstu i liczb - Formuły - Usuwanie wpisów - Sporządzanie wykresów w kartezjańskim układzie współrzędnych - Sposoby prezentacji - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie                                                                         |            |
| Nierówności                                                                                                                                                                                                                                                                                             | 147        |
| Większe niż i mniejsze niż - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie                                                                                                                                                                                                                                    |            |
| Wartości bezwzględne                                                                                                                                                                                                                                                                                    | 148        |
| Moduł - Wykresy - Nierówności - Interakcja - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie                                                                                                                                                                                                                    |            |
| <i>Czy potrafisz? Lista kontrolna F.4</i>                                                                                                                                                                                                                                                               | 157        |
| <i>Zadania sprawdzające F.4</i>                                                                                                                                                                                                                                                                         | 158        |
| <i>Dalsze wyzwania F.4</i>                                                                                                                                                                                                                                                                              | 158        |
| <b>Program F.5 Równania Liniowe</b>                                                                                                                                                                                                                                                                     | <b>161</b> |
| <i>Czego się nauczę z tego programu?</i>                                                                                                                                                                                                                                                                | 161        |
| <i>Quiz F.5</i>                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 162        |
| Równania liniowe                                                                                                                                                                                                                                                                                        | 163        |
| Rozwiązywanie równań prostych - Układ dwóch równań z dwoma niewiadomymi - Układy trzech równań z trzema niewiadomymi - Wstępne upraszczanie - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie                                                                                                                   |            |

|                                                                                                                                                                                               |            |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <i>Czy potrafisz? Lista kontrolna F.5</i>                                                                                                                                                     | 173        |
| <i>Zadania sprawdzające F.5</i>                                                                                                                                                               | 174        |
| <i>Dalsze wyzwania F.5</i>                                                                                                                                                                    | 174        |
| <b>Program F.6 Równania wielomianowe</b>                                                                                                                                                      | <b>177</b> |
| <i>Czego się nauczę z tego programu?</i>                                                                                                                                                      | 177        |
| <i>Quiz F.6</i>                                                                                                                                                                               | 178        |
| Równania wielomianowe                                                                                                                                                                         | 179        |
| Równania kwadratowe - Równania trzeciego stopnia posiadające przynajmniej jeden prosty czynnik liniowy - Równania wielomianowe czwartego stopnia posiadające co najmniej dwa czynniki liniowe |            |
| - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie                                                                                                                                                     |            |
| <i>Czy potrafisz? Lista kontrolna F.6</i>                                                                                                                                                     | 193        |
| <i>Zadania sprawdzające F.6</i>                                                                                                                                                               | 193        |
| <i>Dalsze wyzwania F.6</i>                                                                                                                                                                    | 193        |
| <b>Program F.7 Dwumiany</b>                                                                                                                                                                   | <b>195</b> |
| <i>Czego się nauczę z tego programu?</i>                                                                                                                                                      | 195        |
| <i>Quiz F.7</i>                                                                                                                                                                               | 196        |
| Silnia i kombinacje                                                                                                                                                                           | 197        |
| Silnia - Kombinacje - Trzy własności współczynników kombinatorycznych                                                                                                                         |            |
| - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie Wzór na dwumian Newtona                                                                                                                             | 205        |
| Trójkąt Pascala - Dwumian Newtona - Ogólny składnik rozwinięcia wielomianowego - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie                                                                      |            |
| Zapis przy użyciu znaku $\Sigma$ (sigma)                                                                                                                                                      | 211        |
| Składniki ogólne sumy w zapisie ze znakiem $\Sigma$ - Suma n pierwszych liczb naturalnych - Reguły działania na sumach - Liczba e - Podsumowanie                                              |            |
| - Ćwiczenia na powtórzenie                                                                                                                                                                    |            |
| <i>Czy potrafisz? Lista kontrolna F.7</i>                                                                                                                                                     | 220        |
| <i>Zadania sprawdzające F.7</i>                                                                                                                                                               | 220        |
| <i>Dalsze wyzwania F.7</i>                                                                                                                                                                    | 221        |
| <b>Program F.8 Ułamki proste</b>                                                                                                                                                              | <b>223</b> |
| <i>Czego się nauczę z tego programu?</i>                                                                                                                                                      | 223        |
| <i>Quiz F.8</i>                                                                                                                                                                               | 224        |
| Ułamki proste                                                                                                                                                                                 | 225        |
| Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie                                                                                                                                                       |            |
| Mianowniki z powtarzającymi się i kwadratowymi czynnikami                                                                                                                                     | 232        |
| Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie                                                                                                                                                       |            |
| <i>Czy potrafisz? Lista kontrolna F.8</i>                                                                                                                                                     | 239        |
| <i>Zadania sprawdzające F.8</i>                                                                                                                                                               | 240        |
| <i>Dalsze wyzwania F.8</i>                                                                                                                                                                    | 240        |
| <b>Program F.9 Trygonometria</b>                                                                                                                                                              | <b>243</b> |
| <i>Czego się nauczę z tego programu?</i>                                                                                                                                                      | 243        |
| <i>Quiz F.9</i>                                                                                                                                                                               | 244        |
| Kąty                                                                                                                                                                                          | 245        |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |            |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| Obrót - Radiany - Trójkąty - Funkcje trygonometryczne - Odwrotności funkcji trygonometrycznych - Twierdzenie Pitagorasa - Trójkąty specjalne - Połowa trójkąta równobocznego – Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie                                                                                                           |            |
| Tożsamości trygonometryczne                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | 258        |
| Jedynka trygonometryczna - Dodatkowe dwie tożsamości - Tożsamości dla kątów złożonych - Wzory trygonometryczne – Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie                                                                                                                                                                         |            |
| <i>Czy potrafisz? Lista kontrolna F.9</i>                                                                                                                                                                                                                                                                                        | 264        |
| <i>Zadania sprawdzające F.9</i>                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 264        |
| <i>Dalsze wyzwania F.9</i>                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 265        |
| <b>Program F.10 Funkcje</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | <b>267</b> |
| <i>Czego się nauczę z tego programu?</i>                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 267        |
| <i>Quiz F.10</i>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 268        |
| Przetwarzanie liczb                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | 269        |
| Funkcje jako reguły, lecz nie wszystkie reguły jako funkcje - Funkcje i działania arytmetyczne - Funkcje odwrotne - Wykresy odwzorowań odwrotnych - Wykres funkcji $y = x^3$ - Wykres funkcji $y = x^{1/3}$ - Wykres funkcji $y = x^3$ i $y = x^{1/3}$ w jednym układzie współrzędnych - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie |            |
| Złożenie                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 280        |
| Funkcja z funkcji - Odwzorowania odwrotne do złożień - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie                                                                                                                                                                                                                                   |            |
| <i>Czy potrafisz? Lista kontrolna F.10</i>                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 284        |
| <i>Zadania sprawdzające F.10</i>                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 285        |
| <i>Dalsze wyzwania F.10</i>                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | 285        |
| <b>Program F.11 Funkcje trygonometryczne i wykładnicze</b>                                                                                                                                                                                                                                                                       | <b>287</b> |
| <i>Czego się nauczę z tego programu?</i>                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 287        |
| <i>Quiz F.11</i>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 288        |
| Funkcje trygonometryczne                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 289        |
| Obrót - Tangens - Okres - Amplituda - Przesunięcie fazowe - Odwrotne funkcje trygonometryczne - Równania trygonometryczne - Równania w postaci $a \cos x + b \sin x = c$ - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie                                                                                                               |            |
| Funkcje wykładnicze i logarytmiczne                                                                                                                                                                                                                                                                                              | 303        |
| Funkcje wykładnicze - Równania indeksowe – Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie                                                                                                                                                                                                                                               |            |
| Funkcje parzyste i nieparzyste                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 307        |
| Części parzyste i nieparzyste - Część parzysta i nieparzysta funkcji wykładniczej - Granice funkcji - Działania na granicach – Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie                                                                                                                                                           |            |
| <i>Czy potrafisz? Lista kontrolna F.11</i>                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 312        |
| <i>Zadania sprawdzające F.11</i>                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 313        |
| <i>Dalsze wyzwania F.11</i>                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | 314        |
| <b>Program F.12 Różniczkowanie</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                               | <b>315</b> |

|                                                                                                                                                                          |                |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------|
| <i>Czego się nauczę z tego programu?</i>                                                                                                                                 | 315            |
| <i>Quiz F.12</i>                                                                                                                                                         | 316            |
| Współczynniki kierunkowe i gradienty                                                                                                                                     | 317            |
| Współczynnik kierunkowy prostej - Gradient krzywej w danym punkcie -<br>Określenie gradientu krzywej metodami algebraicznymi                                             |                |
| - Pochodne potęg $x$ - Różniczkowanie wielomianów - Pochodne drugiego<br>i wyższego rzędu - notacja alternatywna - Podsumowanie                                          |                |
| - Ćwiczenia na powtórzenie                                                                                                                                               |                |
| Standardowe pochodne i reguły                                                                                                                                            | 330            |
| Granica $\sin\theta/\theta$ dla $\theta \rightarrow 0$ Standardowe pochodne - Pochodna iloczynu<br>funkcji - Pochodna ilorazu dwóch funkcji - Pochodna funkcji z funkcji |                |
| - Pochodna $y = a^x$ - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie                                                                                                           |                |
| Metoda iteracyjna Newtona                                                                                                                                                | 344            |
| Notacja - Tabelaryczne przedstawienie wyników - Podsumowanie                                                                                                             |                |
| - Ćwiczenia na powtórzenie                                                                                                                                               |                |
| <i>Czy potrafisz? Lista kontrolna F.12</i>                                                                                                                               | 350            |
| <i>Zadania sprawdzające F.12</i>                                                                                                                                         | 351            |
| <i>Dalsze wyzwania F.12</i>                                                                                                                                              | 352            |
| <br><b>Program F.13 Całkowanie</b>                                                                                                                                       | <br><b>353</b> |
| <i>Czego się nauczę z tego programu ?</i>                                                                                                                                | 353            |
| <i>Quiz F.13</i>                                                                                                                                                         | 354            |
| Całkowanie                                                                                                                                                               | 355            |
| Stała całkowania - Całki standardowe - Podsumowanie - Ćwiczenia<br>na powtórzenie                                                                                        |                |
| Całkowanie wyrażeń wielomianowych                                                                                                                                        | 358            |
| Funkcje funkcji liniowej $x$ - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie                                                                                                   |                |
| Całkowanie z użyciem rozkładu na ułamki proste                                                                                                                           | 363            |
| Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie Pola powierzchni<br>pod krzywymi                                                                                                 | 366            |
| Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie Całkowanie jako sumowanie                                                                                                        | 370            |
| Pole powierzchni figury ograniczonej krzywą i przecinającą ją prostą                                                                                                     |                |
| - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie                                                                                                                                |                |
| <i>Czy potrafisz? Lista kontrolna F.13</i>                                                                                                                               | 379            |
| <i>Zadania sprawdzające F.13</i>                                                                                                                                         | 380            |
| <i>Dalsze wyzwania F.13</i>                                                                                                                                              | 381            |
| <br><b>Część II</b>                                                                                                                                                      | <br><b>383</b> |
| <br><b>Program 1 Liczby zespolone 1</b>                                                                                                                                  | <br><b>385</b> |
| <i>Czego się nauczę z tego programu?</i>                                                                                                                                 | 385            |
| Wprowadzenie                                                                                                                                                             | 386            |
| Pojęcia i symbole                                                                                                                                                        |                |
| Symbol $i$                                                                                                                                                               | 386            |
| Równania kwadratowe                                                                                                                                                      |                |
| Potęgi $i$                                                                                                                                                               | 389            |
| Potęgi całkowite dodatnie - Potęgi całkowite ujemne                                                                                                                      |                |

|                                                                                              |            |
|----------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| Liczby zespolone                                                                             | 390        |
| Dodawanie i odejmowanie - Mnożenie - Dzielenie - Równość liczb<br>- Ćwiczenia na powtórzenie |            |
| Przedstawienie graficzne liczb zespolonych                                                   | 399        |
| Diagram Arganda - Interpretacja geometryczna sumy liczb zespolonych                          |            |
| Postać trygonometryczna liczb zespolonych                                                    | 401        |
| Postać wykładnicza liczb zespolonych                                                         | 406        |
| Podsumowanie                                                                                 |            |
| <i>Czy potrafisz? Lista kontrolna 1</i>                                                      | 409        |
| <i>Zadania sprawdzające 1</i>                                                                | 409        |
| <i>Dalsze wyzwania 1</i>                                                                     | 410        |
| <b>Program 2 Liczby zespolone 2</b>                                                          | <b>412</b> |
| Czego się nauczę z tego programu?                                                            | 412        |
| Obliczenia dla postaci trygonometrycznej                                                     | 413        |
| Ćwiczenia na powtórzenie                                                                     |            |
| Pierwiastki liczby zespolonej                                                                | 421        |
| Rozwinięcia                                                                                  | 427        |
| Rozwinięcia $\sin \theta$ i $\cos \theta$ - Rozwinięcia $\cos^n \theta$ i $\sin^n \theta$    |            |
| Miejsca geometryczne                                                                         | 430        |
| Podsumowanie                                                                                 |            |
| <i>Czy potrafisz? Lista kontrolna 2</i>                                                      | 434        |
| <i>Zadania sprawdzające 2</i>                                                                | 434        |
| <i>Dalsze wyzwania 2</i>                                                                     | 435        |
| <b>Program 3 Funkcje hiperboliczne</b>                                                       | <b>437</b> |
| Czego się nauczę z tego programu?                                                            | 437        |
| Wprowadzenie                                                                                 | 438        |
| Wykresy funkcji hiperbolicznych                                                              | 440        |
| Ćwiczenia na powtórzenie                                                                     |            |
| Obliczanie funkcji hiperbolicznych                                                           | 445        |
| Funkcje odwrotne względem funkcji hiperbolicznych                                            | 446        |
| Postać logarytmiczna funkcji odwrotnych do funkcji hiperbolicznych                           | 448        |
| Tożsamości hiperboliczne                                                                     | 451        |
| Zależności pomiędzy funkcjami trygonometrycznymi i hiperbolicznymi                           | 453        |
| <i>Czy potrafisz? Lista kontrolna 3</i>                                                      | 456        |
| <i>Zadania sprawdzające 3</i>                                                                | 457        |
| <i>Dalsze wyzwania 3</i>                                                                     | 457        |
| <b>Program 4 Wyznaczniki</b>                                                                 | <b>459</b> |
| Czego się nauczę z tego programu?                                                            | 459        |
| Wyznaczniki                                                                                  | 460        |
| Wyznaczniki trzeciego stopnia                                                                | 466        |
| Obliczanie wyznaczników trzeciego stopnia                                                    |            |
| Układy równań liniowych z trzema niewiadomymi                                                | 470        |
| Ćwiczenia na powtórzenie                                                                     |            |
| Zgodność układu równań                                                                       | 478        |

|                                                                            |            |
|----------------------------------------------------------------------------|------------|
| Własności wyznaczników                                                     | 481        |
| <i>Czy potrafisz? Lista kontrolna 4</i>                                    | 485        |
| <i>Zadania sprawdzające 4</i>                                              | 485        |
| <i>Dalsze wyzwania 4</i>                                                   | 486        |
| <b>Program 5 Macierze</b>                                                  | <b>489</b> |
| <i>Czego się nauczę z tego programu?</i>                                   | 489        |
| Macierze - definicje                                                       | 490        |
| Notacja macierzowa                                                         | 491        |
| Równość macierzy                                                           | 492        |
| Dodawanie i odejmowanie macierzy                                           | 492        |
| Mnożenie macierzy                                                          | 493        |
| Mnożenie macierzy przez skalar - Mnożenie dwóch macierzy                   |            |
| Macierz transponowana                                                      | 496        |
| Macierze specjalne                                                         | 497        |
| Wyznacznik macierzy kwadratowej                                            | 499        |
| Dopełnienia algebraiczne macierzy - Kwadratowa macierz sprzężona           |            |
| Macierz odwrotna do macierzy kwadratowej nieosobliwej                      | 501        |
| Iloczyn macierzy kwadratowej i jej odwrotności                             |            |
| Rozwiązywanie układów równań liniowych                                     | 504        |
| Metoda eliminacji Gaussa służąca do rozwiązywania układów równań liniowych |            |
| Wartości własne i wektory własne                                           | 509        |
| Wartości własne - Wektory własne - Podsumowanie                            |            |
| <i>Czy potrafisz? Lista kontrolna 5</i>                                    | 515        |
| <i>Zadania sprawdzające 5</i>                                              | 515        |
| <i>Dalsze wyzwania 5</i>                                                   | 515        |
| <b>Program 6 Wektory</b>                                                   | <b>519</b> |
| <i>Czego się nauczę z tego programu?</i>                                   | 519        |
| Wprowadzenie: Wartości skalarne i wektorowe                                | 520        |
| Przedstawienie wektorowe                                                   | 521        |
| Dwa równe wektory - Typy wektorów - Dodawanie wektorów -                   |            |
| Suma dowolnej liczby wektorów                                              |            |
| Składowe danego wektora                                                    | 524        |
| Składowe wektorów wyrażone jako wektory jednostkowe                        |            |
| Wektory w przestrzeni                                                      | 530        |
| Cosinusy kierunkowe                                                        | 532        |
| Iloczyn skalarny dwóch wektorów                                            | 533        |
| Iloczyn wektorowy dwóch wektorów                                           | 535        |
| Kąt między dwoma wektorami                                                 | 537        |
| Stosunki kierunkowe                                                        | 540        |
| Podsumowanie                                                               |            |
| <i>Czy potrafisz? Lista kontrolna 6</i>                                    | 541        |
| <i>Zadania sprawdzające 6</i>                                              | 541        |
| <i>Dalsze wyzwania 6</i>                                                   | 542        |

|                                                                    |                |
|--------------------------------------------------------------------|----------------|
| <b>Program 7 Różniczkowanie</b>                                    | <b>544</b>     |
| <i>Czego się nauczę z tego programu?</i>                           | 544            |
| Pochodne standardowe                                               | 545            |
| Złożenie funkcji                                                   | 546            |
| Iloczyny - Ilorazy                                                 |                |
| Pochodna logarytmiczna                                             | 552            |
| Ćwiczenia na powtórzenie                                           |                |
| Funkcje uwikłane                                                   | 555            |
| Równania parametryczne                                             | 557            |
| <i>Czy potrafisz? Lista kontrolna 7</i>                            | 559            |
| <i>Zadania sprawdzające 7</i>                                      | 560            |
| <i>Dalsze wyzwania 7</i>                                           | 560            |
| <br><b>Program 8 Zastosowania różniczkowania</b>                   | <br><b>562</b> |
| <i>Czego się nauczę z tego programu?</i>                           | 562            |
| Różniczkowanie odwrotnych funkcji trygonometrycznych               | 563            |
| Ćwiczenia na powtórzenie                                           |                |
| Pochodne odwrotnych funkcji hiperbolicznych                        | 565            |
| Ćwiczenia na powtórzenie                                           |                |
| Wartości minimum i maksimum                                        | 570            |
| Punkty przegięcia                                                  | 574            |
| <i>Czy potrafisz? Lista kontrolna 8</i>                            | 580            |
| <i>Zadania sprawdzające 8</i>                                      | 580            |
| <i>Dalsze wyzwania 8</i>                                           | 580            |
| <br><b>Program 9 Styczne, normalne i krzywizny</b>                 | <br><b>583</b> |
| <i>Czego się nauczę z tego programu?</i>                           | 583            |
| Równanie prostej                                                   | 584            |
| Styczne i normalne do krzywej w danym punkcie                      | 587            |
| Krzywizna                                                          | 592            |
| Środek krzywizny                                                   |                |
| <i>Czy potrafisz? Lista kontrolna 9</i>                            | 601            |
| <i>Zadania sprawdzające 9</i>                                      | 602            |
| <i>Dalsze wyzwania 9</i>                                           | 602            |
| <br><b>Program 10 Ciągi</b>                                        | <br><b>605</b> |
| <i>Czego się nauczę z tego programu?</i>                           | 605            |
| Funkcje określone na dziedzinie całkowitej                         | 606            |
| Ciągi - Wykresy ciągów - Ciąg arytmetyczny - Ciąg geometryczny     |                |
| - Ciąg harmoniczny - Określenie rekurencyjne - Inne ciągi          |                |
| - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie                          |                |
| Równania różnicowe                                                 | 618            |
| Rozwiązywanie równań różnicowych - Równania jednorodne             |                |
| drugiego rzędu - Równe pierwiastki równania charakterystycznego    |                |
| - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie                          |                |
| Granice ciągów                                                     | 626            |
| Nieskończoność - Granice - Granice nieskończone - Reguły dotyczące |                |

|                                                                                                                                                                                                          |            |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| granic - Granice nieokreślone - Podsumowanie - Ćwiczenia<br>na powtórzenie                                                                                                                               |            |
| <i>Czy potrafisz? Lista kontrolna 10</i>                                                                                                                                                                 | 635        |
| <i>Zadania sprawdzające 10</i>                                                                                                                                                                           | 636        |
| <i>Dalsze wyzwania 10</i>                                                                                                                                                                                | 637        |
| <b>Program 11 Szeregi 1</b>                                                                                                                                                                              | <b>639</b> |
| <i>Czego się nauczę z tego programu?</i>                                                                                                                                                                 | 639        |
| Szeregi                                                                                                                                                                                                  | 640        |
| Szeregi arytmetyczne - Średnia arytmetyczna - Szeregi geometryczne<br>- Średnia geometryczna                                                                                                             |            |
| Szeregi potęgowe liczb naturalnych                                                                                                                                                                       | 645        |
| Suma liczb naturalnych - Suma kwadratów - Suma sześciąt                                                                                                                                                  |            |
| Szeregi nieskończone                                                                                                                                                                                     | 648        |
| Ograniczenia 650 Szeregi zbieżne i rozbieżne - Testy zbieżności<br>- Zbieżność absolutna - Podsumowanie                                                                                                  |            |
| <i>Czy potrafisz? Lista kontrolna 11</i>                                                                                                                                                                 | 660        |
| <i>Zadania sprawdzające 11</i>                                                                                                                                                                           | 660        |
| <i>Dalsze wyzwania 11</i>                                                                                                                                                                                | 661        |
| <b>Program 12 Szeregi 2</b>                                                                                                                                                                              | <b>663</b> |
| <i>Czego się nauczę z tego programu?</i>                                                                                                                                                                 | 663        |
| Szeregi potęgowe                                                                                                                                                                                         | 664        |
| Wprowadzenie - Szereg Maclaurina - Szeregi standardowe - Szeregi<br>dwumianowe - Wartości przybliżone                                                                                                    | 674        |
| Szereg Taylora                                                                                                                                                                                           |            |
| Wartości granic - formy nieokreślone                                                                                                                                                                     | 677        |
| Reguła l'Hospitala znajdowania wartości granicy                                                                                                                                                          |            |
| <i>Czy potrafisz? Lista kontrolna 12</i>                                                                                                                                                                 | 684        |
| <i>Zadania sprawdzające 12</i>                                                                                                                                                                           | 685        |
| <i>Dalsze wyzwania 12</i>                                                                                                                                                                                | 685        |
| <b>Program 13 Krzywe i dopasowanie krzywej</b>                                                                                                                                                           | <b>688</b> |
| <i>Czego się nauczę z tego programu?</i>                                                                                                                                                                 | 688        |
| Wprowadzenie                                                                                                                                                                                             | 689        |
| Standardowe krzywe                                                                                                                                                                                       | 689        |
| Linia prosta - Krzywe drugiego stopnia - Krzywe trzeciego stopnia<br>- Okrąg - Elipsa - Hiperbola - Krzywe logarytmiczne - Krzywe<br>wykładnicze - Krzywe hiperboliczne - Krzywe trygonometryczne        |            |
| Asymptoty                                                                                                                                                                                                | 697        |
| Określenie asymptoty - Asymptoty równoległe do osi $x$ i $y$                                                                                                                                             |            |
| Systematyczne rysowanie wykresów krzywych na podstawie równania                                                                                                                                          | 702        |
| Symetria - Punkty przecięcia z osiami - Przesunięcie względem początku<br>układu współrzędnych - Asymptoty - Duże i małe wartości $x$ i $y$<br>- Punkty stacjonarne - Ograniczenia Dopasowywanie krzywej | 707        |
| Prawo linii prostej - Wykresy w postaci $y = ax^n$ , gdzie $a$ i $n$ są stałymi<br>- Wykresy w postaci $y = ae^{nx}$                                                                                     |            |

|                                                                        |            |
|------------------------------------------------------------------------|------------|
| Metoda najmniejszych kwadratów                                         | 712        |
| Dopasowywanie linii prostej Korelacja                                  | 718        |
| Korelacja - Miary korelacji - Współczynnik korelacji iloczynu momentów |            |
| Pearsona - Współczynnik korelacja rang Spearmana                       |            |
| Podsumowanie                                                           |            |
| <i>Czy potrafisz? Lista kontrolna 13</i>                               | 726        |
| <i>Zadania sprawdzające 13</i>                                         | 727        |
| <i>Dalsze wyzwania 13</i>                                              | 728        |
| <b>Program 14 Pochodne cząstkowe 1</b>                                 | <b>731</b> |
| <i>Czego się nauczę z tego programu?</i>                               | 731        |
| Pochodne cząstkowe                                                     | 732        |
| Ćwiczenia na powtórzenie                                               |            |
| Małe przyrosty                                                         | 744        |
| <i>Czy potrafisz? Lista kontrolna 14</i>                               | 749        |
| <i>Zadania sprawdzające 14</i>                                         | 749        |
| <i>Dalsze wyzwania 14</i>                                              | 750        |
| <b>Program 15 Pochodne cząstkowe 2</b>                                 | <b>752</b> |
| <i>Czego się nauczę z tego programu?</i>                               | 752        |
| Pochodne cząstkowe                                                     | 753        |
| Prędkość zmiany                                                        | 755        |
| Zmiana zmiennej                                                        | 763        |
| <i>Czy potrafisz? Lista kontrolna 15</i>                               | 765        |
| <i>Zadania sprawdzające 15</i>                                         | 765        |
| <i>Dalsze wyzwania 15</i>                                              | 766        |
| <b>Program 16 Całkowanie 1</b>                                         | <b>768</b> |
| <i>Czego się nauczę z tego programu?</i>                               | 768        |
| Wprowadzenie                                                           | 769        |
| Całki standardowe                                                      |            |
| Funkcje liniowej funkcji x                                             | 772        |
| Całki w postaci $\int'(x)/\int(x)dx$ oraz $\int(x)/\int'(x)dx$         | 774        |
| Całkowanie iloczynów - całkowanie przez części                         | 778        |
| Całkowanie z wykorzystaniem rozkładu na ułamki proste                  | 782        |
| Całkowanie funkcji trygonometrycznych                                  | 787        |
| <i>Czy potrafisz? Lista kontrolna 16</i>                               | 791        |
| <i>Zadania sprawdzające 16</i>                                         | 792        |
| <i>Dalsze wyzwania 16</i>                                              | 792        |
| <b>Program 17 Całkowanie 2</b>                                         | <b>794</b> |
| <i>Czego się nauczę z tego programu?</i>                               | 794        |
| <i>Czy potrafisz? Lista kontrolna 17</i>                               | 819        |
| <i>Zadania sprawdzające 17</i>                                         | 819        |
| <i>Dalsze wyzwania 17</i>                                              | 820        |
| <b>Program 18 Całkowanie z użyciem wzorów rekurencyjnych</b>           | <b>821</b> |

|                                                                       |            |
|-----------------------------------------------------------------------|------------|
| <i>Czego się nauczę z tego rozdziału?</i>                             | 821        |
| <i>Czy potrafisz? Lista kontrolna 18</i>                              | 831        |
| <i>Zadania sprawdzające 18</i>                                        | 831        |
| <i>Dalsze wyzwania 18</i>                                             | 832        |
| <b>Program 19 Zastosowania całkowania 1</b>                           | <b>834</b> |
| <i>Czego się nauczę z tego programu?</i>                              | 834        |
| Podstawowe zastosowania                                               | 835        |
| Obszar pod krzywą - Całki oznaczone                                   |            |
| Równania parametryczne                                                | 843        |
| Wartości średnie                                                      | 844        |
| Wartość średniej kwadratowej (RMS)                                    | 846        |
| Podsumowanie                                                          |            |
| <i>Czy potrafisz? Lista kontrolna 19</i>                              | 849        |
| <i>Zadania sprawdzające 19</i>                                        | 849        |
| <i>Dalsze wyzwania 19</i>                                             | 849        |
| <b>Program 20 Zastosowania całkowania 2</b>                           | <b>851</b> |
| <i>Czego się nauczę z tego programu?</i>                              | 851        |
| Wprowadzenie                                                          | 852        |
| Objętość bryły obrotowej                                              | 852        |
| Środek geometryczny figury płaskiej                                   | 856        |
| Środek ciężkości bryły obrotowej                                      | 859        |
| Długość krzywej                                                       | 860        |
| Równania parametryczne                                                |            |
| Powierzchnia bryły obrotowej                                          | 864        |
| Równania parametryczne                                                |            |
| Reguła Pappusa-Guldina                                                | 867        |
| Podsumowanie                                                          |            |
| <i>Czy potrafisz? Lista kontrolna 20</i>                              | 869        |
| <i>Zadania sprawdzające 20</i>                                        | 870        |
| <i>Dalsze wyzwania 20</i>                                             | 870        |
| <b>Program 21 Zastosowania całkowania 3</b>                           | <b>873</b> |
| <i>Czego się nauczę z tego programu?</i>                              | 873        |
| Momenty bezwładności                                                  | 874        |
| Promień bezwładności - Twierdzenie o osiach równoległych              |            |
| - Twierdzenie o osiach prostopadłych (dla cienkich płytek)            |            |
| - Przydatne wyniki standardowe                                        |            |
| Geometryczny moment bezwładności                                      | 888        |
| Figury złożone                                                        |            |
| Środek parcia                                                         | 892        |
| Ciśnienie w punkcie P o głębokości z poniżej lustra płynu - Całkowite |            |
| parcie na pionową płytkę zanurzoną w płynie - Głębokość środka parcia |            |
| - Podsumowanie                                                        |            |
| <i>Czy potrafisz? Lista kontrolna 21</i>                              | 899        |
| <i>Zadania sprawdzające 21</i>                                        | 899        |

|                                                                    |            |
|--------------------------------------------------------------------|------------|
| <i>Dalsze wyzwania 21</i>                                          | 900        |
| <b>Program 22 Całkowanie numeryczne</b>                            | <b>902</b> |
| <i>Czego się nauczę z tego programu?</i>                           | 902        |
| Wprowadzenie                                                       | 903        |
| Całkowanie numeryczne                                              | 904        |
| Za pomocą szeregów - Z użyciem metody Simpsona                     |            |
| Dowód metody Simpsona                                              | 916        |
| <i>Czy potrafisz? Lista kontrolna 22</i>                           | 918        |
| <i>Zadania sprawdzające 22</i>                                     | 918        |
| <i>Dalsze wyzwania 22</i>                                          | 919        |
| <b>Program 23 Układ współrzędnych biegunowych</b>                  | <b>921</b> |
| <i>Czego się nauczę z tego programu?</i>                           | 921        |
| Wprowadzenie do współrzędnych biegunowych                          | 922        |
| Krzywe biegunowe                                                   | 924        |
| Standardowe krzywe biegunowe                                       | 926        |
| Zastosowania                                                       | 929        |
| Podsumowanie                                                       |            |
| <i>Czy potrafisz? Lista kontrolna 23</i>                           | 941        |
| <i>Zadania sprawdzające 23</i>                                     | 941        |
| <i>Dalsze wyzwania 23</i>                                          | 942        |
| <b>Program 24 Całki wielokrotne</b>                                | <b>943</b> |
| <i>Czego się nauczę z tego programu?</i>                           | 943        |
| Sumowanie w dwóch kierunkach                                       | 944        |
| Całki podwójne                                                     | 947        |
| Całki potrójne                                                     | 949        |
| Zastosowania                                                       | 951        |
| Ćwiczenia na powtórzenie                                           |            |
| Zapis alternatywny                                                 | 956        |
| Obliczenia pól powierzchni z użyciem całek wielokrotnych           | 960        |
| Obliczanie objętości z użyciem całek wielokrotnych                 | 962        |
| <i>Czy potrafisz? Lista kontrolna 24</i>                           | 965        |
| <i>Zadania sprawdzające 24</i>                                     | 965        |
| <i>Dalsze wyzwania 24</i>                                          | 966        |
| <b>Program 25 Równania różniczkowe pierwszego rzędu</b>            | <b>968</b> |
| <i>Czego się nauczę z tego programu?</i>                           | 968        |
| Wprowadzenie                                                       | 969        |
| Tworzenie równań różniczkowych                                     | 970        |
| Rozwiązywanie równań różniczkowych                                 | 970        |
| Za pomocą bezpośredniego całkowania - Przez rozdzielenie zmiennych |            |
| - Ćwiczenia na powtórzenie                                         |            |
| Rozwiązywanie równań różniczkowych                                 | 979        |
| Równania jednorodne - przez podstawienie $y = vx$                  |            |
| - Ćwiczenia na powtórzenie                                         |            |

|                                                                  |             |
|------------------------------------------------------------------|-------------|
| Rozwiązywanie równań różniczkowych                               | 985         |
| Równania liniowe - użycie czynnika całkującego                   |             |
| Równanie Bernoulliego                                            | 993         |
| Podsumowanie                                                     |             |
| <i>Czy potrafisz? Lista kontrolna 25</i>                         | 999         |
| <i>Ćwiczenia testowe 25</i>                                      | 1000        |
| <i>Dalsze wyzwania 25</i>                                        | 1000        |
| <b>Program 26 Równania różniczkowe drugiego rzędu</b>            | <b>1004</b> |
| <i>Czego się nauczę z tego programu?</i>                         | 1004        |
| Równania jednorodne                                              | 1005        |
| Ćwiczenia na powtórzenie                                         |             |
| Równania niejednorodne                                           | 1013        |
| Rozwiązanie szczególne                                           | 1020        |
| Podsumowanie                                                     |             |
| <i>Czy potrafisz? Lista kontrolna 26</i>                         | 1024        |
| <i>Zadania sprawdzające 26</i>                                   | 1025        |
| <i>Dalsze wyzwania 26</i>                                        | 1025        |
| <b>Program 27 Wprowadzenie do transformat Laplace'a</b>          | <b>1027</b> |
| <i>Czego się nauczę z tego programu?</i>                         | 1027        |
| Transformata Laplace'a                                           | 1028        |
| Odwrotna transformata Laplace'a - Tabela transformat Laplace'a - |             |
| Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie                          |             |
| Transformata Laplace'a                                           | 1032        |
| Transformata Laplace'a pochodnej - Dwie właściwości transformat  |             |
| Laplace'a - Tabela transformat Laplace'a                         |             |
| Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie                          |             |
| Transformata Laplace'a                                           | 1036        |
| Generowanie nowych transformat - Transformaty Laplace'a wyższych |             |
| pochodnych - Tabela transformat Laplace'a - Równania różniczkowe |             |
| niejednorodne, liniowe, o stałych współczynnikach - Podsumowanie |             |
| - Ćwiczenia na powtórzenie                                       |             |
| <i>Czy potrafisz? Lista kontrolna 27</i>                         | 1043        |
| <i>Zadania sprawdzające 27</i>                                   | 1043        |
| <i>Dalsze wyzwania 27</i>                                        | 1044        |
| <b>Program 28 Przetwarzanie danych i statystyka</b>              | <b>1045</b> |
| <i>Czego się nauczę z tego programu?</i>                         | 1045        |
| Wprowadzenie                                                     | 1046        |
| Uporządkowywanie danych                                          | 1046        |
| Tabela zliczania metodą kreskową - Dane grupowane - Grupowanie   |             |
| danych ciągłych - Częstość względna - Zaokrąglanie danych -      |             |
| Granice klas                                                     |             |
| Histogramy                                                       | 1053        |
| Histogram częstości - Histogram częstości względnej              |             |
| Miary tendencji centralnej                                       | 1055        |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                      |             |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------|
| Średnia - Kodowanie przy obliczaniu średniej - Dekodowanie -<br>Kodowanie w zgrupowanych rozkładach częstości - Moda -<br>Moda w danych zgrupowanych - Mediana - Mediana z pogrupowanych<br>danych                                                                                   |             |
| Miary rozproszenia                                                                                                                                                                                                                                                                   | 1063        |
| Średnie odchylenie - Rozstęp - Odchylenie standardowe - Alternatywny<br>wzór na odchylenie standardowe                                                                                                                                                                               |             |
| Krzywe dystrybucji                                                                                                                                                                                                                                                                   | 1066        |
| Wielokąty częstości - Krzywe częstości - Krzywa rozkładu normalnego -<br>Standaryzowana krzywa normalna                                                                                                                                                                              | 1069        |
| Podsumowanie                                                                                                                                                                                                                                                                         |             |
| <i>Czy potrafisz? Lista kontrolna 28</i>                                                                                                                                                                                                                                             | 1072        |
| <i>Zadania sprawdzające 28</i>                                                                                                                                                                                                                                                       | 1072        |
| <i>Dalsze wyzwania 28</i>                                                                                                                                                                                                                                                            | 1073        |
| <b>Program 29 Prawdopodobieństwo</b>                                                                                                                                                                                                                                                 | <b>1076</b> |
| <i>Czego się nauczę z tego programu?</i>                                                                                                                                                                                                                                             | 1076        |
| Prawdopodobieństwo                                                                                                                                                                                                                                                                   | 1077        |
| Doświadczenia losowe - Zdarzenia - Seria doświadczeń losowych -<br>Łączenie zdarzeń                                                                                                                                                                                                  |             |
| Zdarzenia i prawdopodobieństwa                                                                                                                                                                                                                                                       | 1079        |
| Prawdopodobieństwo - Przypisywanie prawdopodobieństw -<br>Podsumowanie                                                                                                                                                                                                               |             |
| Prawdopodobieństwa zdarzeń łączonych                                                                                                                                                                                                                                                 | 1082        |
| Zdarzenia niewykluczające się wzajemnie - Zdarzenia zależne -<br>Zdarzenia niezależne - Drzewka prawdopodobieństwa - Podsumowanie                                                                                                                                                    |             |
| Prawdopodobieństwo warunkowe                                                                                                                                                                                                                                                         | 1087        |
| Rozkłady prawdopodobieństwa                                                                                                                                                                                                                                                          | 1090        |
| Zmienne losowe - Wartości oczekiwane - Wariancja i odchylenie<br>standardowe - Próby Bernoulliego - Dwumianowy rozkład<br>prawdopodobieństwa - Wartość oczekiwana i odchylenie standardowe -<br>Rozkład prawdopodobieństwa Poissona - Porównanie rozkładu<br>dwumianowego i Poissona |             |
| Ciągłe rozkłady prawdopodobieństwa                                                                                                                                                                                                                                                   | 1106        |
| Krzywa rozkładu normalnego (lub krzywa normalna)                                                                                                                                                                                                                                     |             |
| Standardowa krzywa normalna                                                                                                                                                                                                                                                          | 1106        |
| Podsumowanie                                                                                                                                                                                                                                                                         |             |
| <i>Czy potrafisz? Lista kontrolna 29</i>                                                                                                                                                                                                                                             | 1112        |
| <i>Zadania sprawdzające 29</i>                                                                                                                                                                                                                                                       | 1113        |
| <i>Dalsze wyzwania 29</i>                                                                                                                                                                                                                                                            | 1113        |
| <b>Odpowiedzi</b>                                                                                                                                                                                                                                                                    | <b>1117</b> |
| <b>Indeks</b>                                                                                                                                                                                                                                                                        | <b>1145</b> |